

Workshop: Das Kunstgalerieproblem – Oder wie einfach man 100 Millionen Euro bewacht

	<p>20.05.2010: Museumseinbruch in Paris Gemälde im Wert von 100 Millionen Euro gestohlen</p> <p>Es ist einer der spektakulärsten Kunstdiebstähle der Geschichte – über Nacht hat ein maskierter Unbekannter aus einem Pariser Museum Gemälde von Picasso, Matisse und anderen Künstlern gestohlen. Geschätzter Wert der fünf Werke: knapp 100 Millionen Euro.</p> <p>Eines der gestohlenen Gemälde: “Le pigeon aux petits pois” von Picasso</p>
---	---

Peinlich, peinlich! Der Kunstraub war auch deshalb möglich, weil das Museum keine funktionierende Alarmanlage hatte. Diese war kurz zuvor kaputt gegangen. Nur so konnte der Dieb völlig ungestört die teuren Gemälde einpacken. Dabei hätte man doch leicht vorübergehend die Kunstschatze von Nachtwächtern bewachen lassen können.

Im folgenden wollen wir einen kleinen Ausflug in die Welt der **Kombinatorik** machen. Dieser Bereich der Mathematik beschäftigt sich mit der Berechnung der Anzahlen möglicher Anordnungen oder Auswahlen von Objekten unter bestimmten Bedingungen. In unserem Fall wollen wir ein Modell für die Bewachung von Museen entwickeln und hier der Frage nachgehen: *“Wie viele Nachtwächter benötigen wir, um ein Museum einer bestimmten Form zu bewachen? Und wo müssen diese platziert werden?”*

Um mathematische Aussagen zu diesem Problem treffen zu können, betrachten wir eine vereinfachte Problemstellung, ein sogenanntes *Modell*. In unserem Modell sind nur bestimmte Formen für Museen zugelassen: **Polygone**.

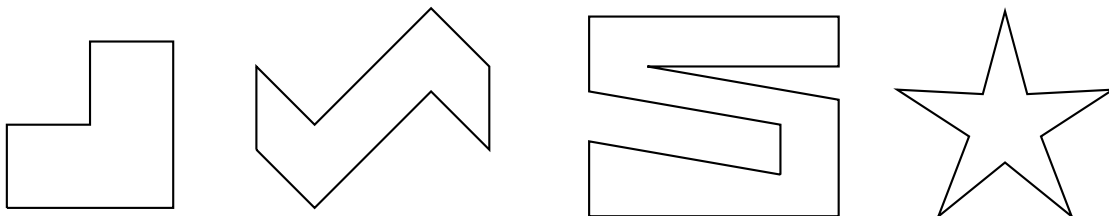


Abbildung 1: Mögliche Formen eines Museums

Definition:

Das *Polygon* oder auch Vieleck ist ein Begriff aus der Geometrie. Ein Polygon erhält man, indem man mindestens drei voneinander verschiedene Punkte in einer Zeichenebene durch Strecken miteinander verbindet, sodass durch den entstandenen Linienzug eine zusammenhängende Fläche (Figur) umschlossen wird.

Beispiele für Polygone siehst Du in Abbildung 1. Die wohl einfachsten Polygone sind Dreiecke und Vierecke.

Wenn wir also im Folgenden von einem *Museum* sprechen, so ist ein Polygon gemeint, dessen Form wir uns als Grundriss eines Gebäudes vorstellen. Nun müssen wir noch erklären, was ein *Nachtwächter* in einem Polygon-Museum sein soll. Für unsere mathematische Fragestellung gehen wir hier davon aus, dass ein Nachtwächter auf einem festen Punkt steht und von dort in jede Richtung bis zur nächsten Wand schauen kann:

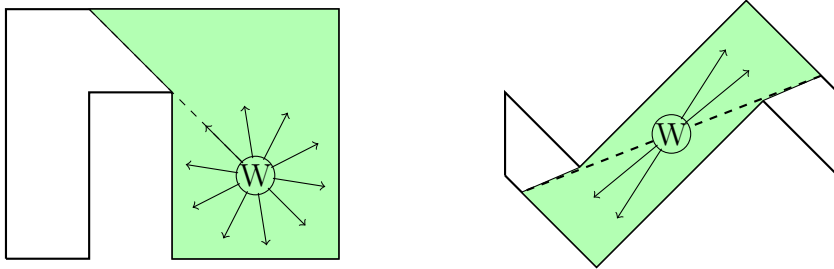


Abbildung 2: Nachtwächter und ihre Sichtbereiche

Damit haben wir ein Modell gefunden und sind bereit, für unserer erste Aufgabe.

Problem: (Unsere erster Auftrag)

Angenommen wir wollen ein Museum in der Form eines Polygons bewachen. Wie viele Nachtwächter benötigen wir dann, wenn das Museum n Ecken hat?

Mit $\lfloor x \rfloor$ bezeichnen wir den ganzzahligen (abgerundeten) Anteil von x . So ist z.B.

$$\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2, \quad \lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0, \quad \lfloor 5 \rfloor = 5.$$

Satz:

Es gibt Museen mit n Ecken, für die wir mindestens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Nachtwächter benötigen.

Beweis: (durch Konstruktion)

Wir konstruieren eine Serie von Polygone, die tatsächlich $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Nachtwächter benötigen.

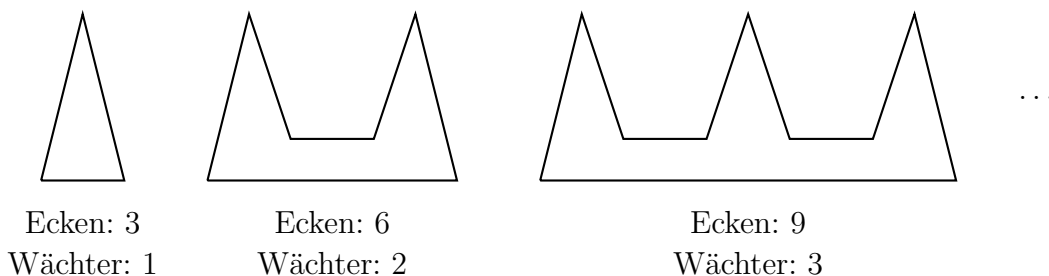


Abbildung 3: Museen, die schwer zu bewachen sind

Wie man leicht überprüft, kann kein Nachtwächter zwei 'Zacken' dieser Museen gleichzeitig bewachen. Deshalb benötigen wir hier mindestens $\frac{n}{3}$ Nachtwächter.

Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, wählen wir ein Polygon aus obiger Serie, das $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Nachtwächter benötigt, und fügen noch ein oder zwei weitere Ecken hinzu. □

Wir haben also gesehen, dass es notwendig sein kann, für ein Museum mit n Ecken $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Nachtwächter einzustellen. Nun stellt sich natürlich die Frage:

Problem:

Kann jedes Museum mit n Ecken mit $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Nachtwächtern bewacht werden?

Bevor wir dieses Problem lösen, führen wir noch zwei neue Begriffe ein:

Satz: (Schubfachprinzip)

Wenn wir n Socken auf k Schubladen aufteilen, so gibt es immer eine Schublade, in der höchstens $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ Socken liegen.

Begründung: Wir überlegen uns anhand eines Beispiels, was passiert, wenn wir 9 Socken auf 5 Schubladen verteilen:



Für einen (echten) Beweis des Schubfachprinzips nimmt man an, dass in jeder Schublade mindestens $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ Socken liegen, und zeigt dann:

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right) \cdot k > n.$$

Definition:

Eine *Triangulierung* eines Polygons ist eine Unterteilung seiner Innenfläche in Dreiecke. Dabei darf die Innenfläche nur durch Verbindungsstrecken von Ecken des Polygons geteilt werden, und diese Verbindungsstrecken dürfen sich nicht kreuzen.

Beispiele für Triangulierungen:

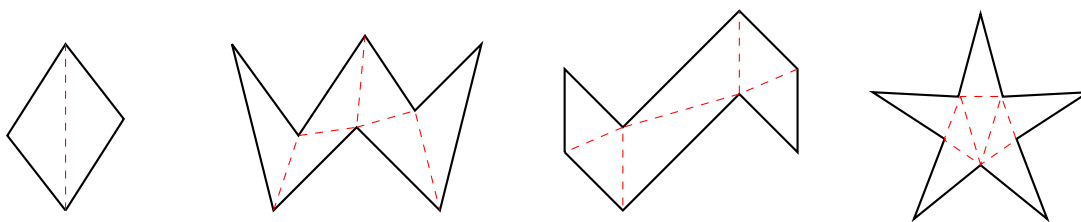


Abbildung 4: Verschiedene triangulierte Polygone

Diese Triangulierungen und das Schubfachprinzip werden uns helfen, eine gute Platzierung für die Nachtwächter zu finden, und damit folgenden Satz zu beweisen:

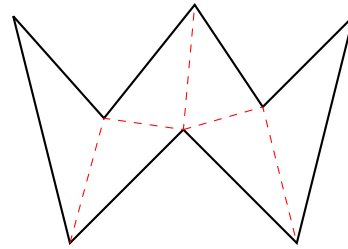
Satz:

Jedes Museum mit n Ecken kann mit höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Nachtwächtern bewacht werden.

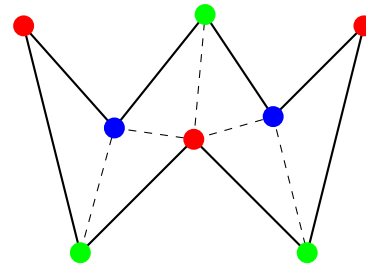
Der folgende Beweis wurde anhand eines Beispiels veranschaulicht. Wie es sich für einen Beweis gehört, funktioniert dieses Argument für jede mögliche Form. Wir empfehlen dies anhand Deines privaten Lieblingsmuseums zu überprüfen.

Beweis:

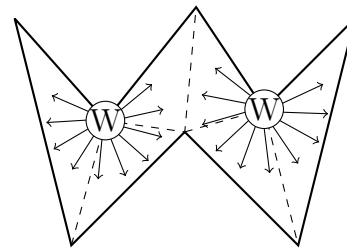
Sei ein Museum mit n Ecken in Form eines Polygons gegeben. Im ersten Beweisschritt triangulieren wir dieses Polygon. Auf diese Weise erhalten wir eine Unterteilung des Museums in Dreiecke, deren Ecken an den Ecken des Polygons zusammenliegen.



Nun nehmen wir drei Farben (Rot, Grün, Blau) und färben die Ecken des Polygons so ein, dass in jedem Dreieck jede Farbe nur genau ein Mal auftritt. Dies funktioniert immer, wenn wir einfach bei einem Dreieck beginnen, und dann nach und nach benachbarte Dreiecke färben.



Da wir n Ecken mit drei Farben gefärbt haben, muss es nach dem *Schubfachprinzip* eine Farbe geben, die in höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Ecken verwendet wurde. Andererseits ist in jedem Dreieck der Triangulierung eine Ecke mit dieser Farbe. Wir stellen also an jeder dieser Ecken einen Nachtwächter und haben so das ganze Museum bewacht.



□

Damit haben wir gezeigt, dass jedes Museum mit n Ecken durch höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Nachtwächter bewacht werden kann. Dies ist in der allgemeinen Form auch das bestmögliche Ergebnis, wie unsere Konstruktion zu Beginn gezeigt hat.

Ob der Pariser Museumsdirektor gewusst hat, wie einfach er seine teuren Gemälde beschützen hätte können?

Zum Weiterdenken

Das Problem, das wir gerade gelöst haben, findet man unter dem Namen *Art Gallery Problem* (Kunstgalerieproblem) im Internet. Aber es ist nicht das einzige seiner Art. Hier einige Variationen zum Knobeln:

- Wollen wir statt der Innenfläche die Außenfläche eines Polygons bewachen, so handelt es sich um das sogenannte *Fortress Problem* (Festungsproblem).
- Soll sowohl die Innen- wie auch die Außenfläche bewacht werden, so sprechen wir vom *Prison Problem* (Gefängnisproblem).
- Wir können auch die Form einschränken: Ein orthogonales Polygon ist ein Polygon, in dem alle Seiten senkrecht aufeinander stehen. Ein orthogonales Museum hat also nur Ecken mit 90° -Winkel.

Wie viele Wächter werden jeweils mindestens bzw. höchstens benötigt?